Τέλος, γεννάται ένα ερώτημα αν $\exists y'(1)$.
Άλλως εξετάζουμε με τον ορισμό της ύπαρξης παραγώγου ώστε να εξετάσουμε και την αναγκαία συνθήκη (δηλ. να δούμε εάν πράγματι η $y(x)$ ρίζα της εξίσωσης)

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να λυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y' + by = \sin(ax), \quad b>0 \text{ και } a \neq 0$$

ΛΥΣΗ

$$e^{bx} \cdot y' + e^{bx} \cdot b \cdot y = e^{bx} \cdot \sin(ax) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(e^{bx} \cdot y\right)' = e^{bx} \cdot \sin(ax) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{bx} y = \int e^{bx} \cdot \sin(ax)\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = e^{-bx} \cdot \int e^{bx} \cdot \sin(ax)\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = e^{-bx} \cdot \left(c + e^{bx} \cdot \frac{1}{a^2+b^2} \left(b \cdot \sin(ax) - a \cdot \cos(ax) \right) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = c \cdot e^{-bx} + \underbrace{\left(b \cdot \sin(ax) - a \cdot \cos(ax)\right)}_{k \cdot \sin(ax+b)} \frac{1}{a^2+b^2}$$

Επιπλέον για την παραπάνω άσκηση να εξετασθεί εάν υπάρχει το $\lim_{x \to \infty} y(x)$ για $b>0$ και $a \neq 0$

ΛΥΣΗ

Προφανώς δεν υπάρχει το όριο μας διότι με επιλογή δύο ακολουθιών βλέπουμε ότι

$$x_\nu = \frac{2\nu\pi}{|a|} \to \infty \quad \text{και} \quad f(x_\nu) \to -\frac{a^2}{a^2+b^2}$$

και

$$y_\nu = \frac{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}{|a|} \to \infty \quad \text{και} \quad f(y_\nu) \to \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

(6)

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση:
$ay'+by=k\cdot e^{-\lambda x}$, $a,b,k>0$ και $\lambda\geq 0$
να έχει λύση.

ΛΥΣΗ

Με όμοιο τρόπο:

$$y'+\frac{b}{a}y=\frac{k}{a}\cdot e^{-\lambda x}\xrightarrow[\text{ομογενής}]{\text{Γραμμική}} y(x)=e^{-\frac{b}{a}x}\cdot\int\frac{k}{a}\cdot e^{-\lambda x}\cdot e^{\frac{b}{a}x}dx$$

$$\Rightarrow y=e^{-\frac{b}{a}x}\cdot\frac{k}{a}\cdot\int e^{\frac{b}{a}x-\lambda x}dx$$

i) Εάν $\lambda=\frac{b}{a}$, $y(x)=\frac{k}{a}e^{-\frac{b}{a}x}(x+c)$

ii) Εάν $\lambda\neq\frac{b}{a}$, $y(x)=\frac{k}{a}\cdot e^{-\frac{b}{a}x}\cdot\left(\frac{1}{\frac{b}{a}-\lambda}\right)\left(e^{(\frac{b}{a}-\lambda)x}+c\right)=$

$$=\frac{k}{a}\frac{1}{\frac{b}{a}-\lambda}\cdot e^{-\frac{b}{a}x}\cdot c+\frac{k}{a}\frac{1}{\frac{b}{a}-\lambda}e^{-\lambda x}=$$

$$=\begin{cases}0 & \lambda>0\\ \frac{k}{a}\cdot\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{k}{b} & \lambda=0\end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να λυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση
$y'+y\cdot\cos x=e^{-\sin x}$, $x\in\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

όμοια παίρνουμε:

$$y(x)=e^{-\int\cos x\,dx}\cdot\left[c+\int e^{-\sin x}\cdot e^{\int\cos x\,dx}dx\right]=$$

$$=(c+x)\cdot e^{-\sin x},\ x\in\mathbb{R}$$

Ορισμός (Διαφορικής εξίσωσης Bernoulli)

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y' + a(x)\cdot y = b(x)\cdot y^r, \quad r \neq 0 \text{ και } r \neq 1$$

Τότε τη μετατρέπουμε σε γραμμική ομογενής α' τάξης

Θέτουμε $z = y^{1-r}$ και παραγωγίζουμε

άρα παίρνουμε:

$$z' = (1-r)\, y^{-r} \cdot y'$$

Έτσι, έχουμε στην αρχική:

$$y' \cdot y^{-r} + \alpha(x)\cdot y^{1-r} = b(x) \Rightarrow \frac{z'}{1-r} + a(x)\, z = b(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' + (1-r)\, a(x)\cdot z = b(x).$$

πχ

Για την διαφορική εξίσωση:

$$x\cdot y' + y = -2\cdot x^2 \cdot y^2, \quad x \neq 0$$

να υπολογιστεί η $y(x)$.

ΛΥΣΗ

$$y' + \frac{1}{x}\cdot y = -2x\, y^2, \quad \text{Θέτω } z = y^{1-2} \Rightarrow z = y^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}$$

Άρα, στην αρχική εξίσωση, είναι:

$$-z' + \frac{1}{x} z = -2x \Rightarrow z' - \frac{1}{x} z = 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-\int \frac{1}{x} dx} \cdot z' - \frac{1}{x} \cdot z\, e^{-\int \frac{1}{x} dx} = 2x \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x) = e^{\log|x|} \left(c + \int 2x \cdot e^{-\log|x|} dx \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x) = |x| \left(c + \int 2x \cdot \frac{1}{|x|}\, dx \right)$$

- Για $x > 0$, $z(x) = x\,(c + 2x) \Rightarrow y(x) = \dfrac{1}{x(c+2x)}$.

  Αλλά, π.ο. $x \in \mathbb{R} - \{0, -\frac{c}{2}\}$

• Για $x<0$, $z(x) = -x(c-2x) \Rightarrow y(x) = \dfrac{1}{x(2x-c)}$
Αλλα, Π.Ο $x \in \mathbb{R}-\{0, \frac{c}{2}\}$

β' τρόπος

$$xy' + y = -2x^2 y^2 \Rightarrow (xy)' = -2(xy)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' = -2z^2 \quad , \text{οπου } z = x \cdot y$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{z^2} = -2 \Rightarrow \frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{dx} = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z^2} = -2dx \Rightarrow -\frac{1}{z} = -2x + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = 2x - c \Rightarrow z = \frac{1}{2x-c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x \cdot (2x-c)} \quad , \forall x \neq 0 \ \& \ x \neq \frac{c}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να βρεθεί μια συνεχής συνάρτηση συνάρτηση $y: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τετοια ωστε:

$$y(x) + 1 = \int_0^x y(t)\,(t\,y(t) - 1)\,dt$$

ΛΥΣΗ

Προσοχή!!!

Η y συνεχής $\not\Rightarrow$ Η y παραγωγίσιμη

Η συνάρτηση $y(t) \cdot (t\,y(t) - 1)$ συνεχής $\xRightarrow{\text{Απ2}}$

$\xRightarrow{\text{Απ2}} \int_0^x y(t)\,(t\,y(t)-1)\,dt$ παραγωγίσιμη $\Rightarrow$

$\Rightarrow y(x)+1$ παραγωγίσιμη $\Rightarrow y(x)$ παραγωγίσιμη.

Αρα, έχουμε δικαίωμα να παραγωγίσουμε την εξίσωση και έτσι παίρνουμε ότι:

$$y'(x) = y(x)\,[\,x\,y(x) - 1\,] \quad , x \geq 0$$

Ισοδύναμα

$$y' = xy^2 - y \Rightarrow y' + y = xy^2, \quad x \geq 0$$

Είναι διαφορική εξίσωση Bernoulli με $r=2$

Άρα, θέτουμε $z=y^{1-2} \Rightarrow z=\frac{1}{y} \Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$\Rightarrow z'-z=-x \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x)=\frac{1}{c\cdot e^{x}+x+1}, \quad \forall x\geq 0 \quad (1)$$

όπου, $y(0)+1=\cancel{\int_0^0 y(t)\cdot(t\cdot y(t)-1)\,dt}^{\,0} \Rightarrow y(0)=-1$

Άρα, $(1) \rightarrow -1=\frac{1}{c+1} \Rightarrow -c-1=1 \Rightarrow \boxed{c=-2}$

Άρα, συγκεκριμένα:

$$y(x)=\frac{1}{-2e^{x}+x+1}, \quad \forall x\geq 0.$$